Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA 5 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E EQUAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR À PRIMEIRA

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

(a) Quais são os valores próprios de A?
(b) Quais são os vectores próprios de A?
(c) Determine uma matriz de mudança de base, S, que diagonaliza A, e determine a sua inversa, S^{-1}.
(d) Calcule e^{At}.
(e) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

(f) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$

(g) Escreva duas funções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior.

Resolução:

(a) *Os valores próprios são os zeros do polinómio característico:*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 5 . \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são 1 e 5.

(b) *Os vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 satisfazem*

$$(A - I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = -b .$$

Logo, os vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 são os vectores da forma

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a \in \mathbb{R} .$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio 5 satisfazem

$$(A - 5I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b .$$

Logo, os vectores próprios de A associados ao valor próprio 5 são os vectores da forma

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a \in \mathbb{R} .$$

(c) *Mudando para uma base de vectores próprios de A, a transformação linear dada por A fica diagonal. Tome-se, por exemplo, a matriz de mudança de base*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas primeira e segunda colunas são vectores próprios de A associados aos valores próprios 1 e 5, respectivamente. A mudança inversa é

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Então tem-se

$$A = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} S^{-1} .$$

(d) *De acordo com a alínea anterior,*

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^t+e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t}-e^t}{2} \\ \frac{e^{5t}-e^t}{2} & \frac{e^t+e^{5t}}{2} \end{bmatrix} .$$

(e) *A solução deste problema de valor inicial é*

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^t+e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t}-e^t}{2} \\ \frac{e^{5t}-e^t}{2} & \frac{e^t+e^{5t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3e^{5t}-e^t}{2} \\ \frac{3e^{5t}+e^t}{2} \end{bmatrix} , \ \forall t \in \mathbb{R} .$$

(f) *A solução geral desta equação diferencial é dada, por exemplo, pela expressão*

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^t + c_2e^{5t} \\ c_2e^{5t} - c_1e^t \end{bmatrix} , \ \forall t \in \mathbb{R} \ \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Comentário: *A solução acima pode ser escrita*

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{At} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} , \ \forall t \in \mathbb{R} \ \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Equivalentemente, poder-se-ia ter respondido que a solução geral é dada por

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} , \ \forall t \in \mathbb{R} \ \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

As colunas de e^{At} formam uma base das soluções da equação dada. Como S é uma matriz invertível, as colunas de $e^{At}S$ também formam uma base das soluções da equação. Optou-se pela expressão $e^{At}S$ porque esta dá uma expressão mais simples para a solução geral. ♢

(g) *Compõe-se uma base para o espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior, por exemplo, com as colunas da matriz*

$$S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & e^{5t} \end{bmatrix} ,$$

ou seja, com as funções $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} .$$

De facto, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções linearmente independentes, são soluções da equação da alínea anterior e qualquer outra solução $y(t)$ é da forma $y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ para algum $c_1 \in \mathbb{R}$ e algum $c_2 \in \mathbb{R}$.

□

(2) Para cada uma das matrizes A seguintes, determine e^{At}.

(a)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolução:

(a) *Esta matriz A só tem um valor próprio:*

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I)=0 &\iff (-\lambda)(-2-\lambda)+1=0 \\ &\iff \lambda^2+2\lambda+1=0 \\ &\iff \lambda=-1\ . \end{aligned}$$

Os vectores próprios são dados por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \iff \quad -a=b\ .$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio e procura-se um vector próprio generalizado, w, a associado a v:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \iff \quad c+d=1\ .$$

Escolhe-se a solução $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{J}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}\ .$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & (1+t)e^{-t} \\ -e^{-t} & -te^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}\ . \end{aligned}$$

Comentário: *Quando se detecta que esta matriz 2×2 tem apenas o valor próprio -1, pode-se concluir que a sua forma canónica de Jordan tem apenas um bloco. Com*

efeito, se a forma canónica de Jordan J tivesse dois blocos, seria a matriz diagonal $J = -I$, pelo que a própria matriz A teria que ser

$$A = SJS^{-1} = S(-I)S^{-1} = -SS^{-1} = -I \ ,$$

o que é falso. $\diamondsuit$

(b) *Nota-se que a matriz transposta A^t é um bloco de Jordan. Como*

$$e^{A^t t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^t t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^k t^k)^t}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right)^t = \left(e^{At}\right)^t \ ,$$

calcula-se

$$e^{A^t t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

e conclui-se que

$$e^{At} = \left(e^{A^t t}\right)^t = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix} \ .$$

(c) *Os valores próprios da matriz são as soluções da equação*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(-1-\lambda)\lambda = 0$$

$$\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 0 \ .$$

Os vectores próprios associados a 1 são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = c = 0 \ .$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *para base do espaço próprio de 1.*

Os vectores próprios associados a -1 são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = b \\ c = 0 \ . \end{cases}$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *para base do espaço próprio de -1.*

Os vectores próprios associados a 0 são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = c \ . \end{cases}$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *para base do espaço próprio de 0.*

Assim, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \ .$$

Conclui-se que

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\
&= \begin{bmatrix} e^{t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{t} & e^{-t}-e^{t} & e^{t}-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 1-e^{-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .
\end{aligned}
$$

Comentário: *Ao encontrar 3 valores próprios diferentes para esta matriz* 3×3*, pode-se concluir logo que ela é diagonalizável, ou seja, que existe uma base formada por vectores próprios de* A*, pois valores próprios diferentes admitem vectores próprios linearmente independentes.* ♢

(d) *Os valores próprios da matriz são as soluções da equação*

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad &\iff \quad (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + (3-\lambda) = 0 \\
&\iff \quad \lambda = 3 \text{ ou } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \\
&\iff \quad \lambda = 3 \, ,
\end{aligned}
$$

portanto A *tem apenas o valor próprio* 3.
Os vectores próprios são os vectores que verificam

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A-3I} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \iff \quad -a+b+c=0 \, .
$$

Como há exactamente uma condição linear a que os vectores próprios têm obedecer, o espaço próprio tem dimensão $3-1=2$*. Toma-se os vectores*

$$
v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

para formar uma base do espaço próprio, tendo tido o cuidado de escolher o vector v_2 *pertencente ao espaço das colunas da matriz* $A-3I$*. Calcula-se agora um vector próprio generalizado* w *associado a* v_2*:*

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A-3I} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .
$$

Toma-se, por exemplo, $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Consequentemente, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{3t} & te^{3t} \\ e^{3t} & 0 & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-t)e^{3t} & te^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ -te^{3t} & te^{3t} & (1+t)e^{3t} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

□

(3) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule e^{At}.
(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Resolução:

(a) *Os valores próprios da matriz são as soluções de*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (-1-\lambda)^2 + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = -1 \pm i \ . \end{aligned}$$

Os vectores próprios associados a $-1+i$ são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad ia = b \ .$$

Uma base do espaço próprio de $-1+i$ é constituída pelo vector $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Os vectores próprios associados a $-1-i$ são os vectores conjugados dos vectores próprios associados a $-1+i$. (De facto, se λ e $\overline{\lambda}$ são valores próprios complexos conjugados de uma matriz real A, então $(A-\lambda I)v = 0 \iff (A-\overline{\lambda}I)\overline{v} = 0$.) Uma base do espaço próprio de $-1-i$ é constituída pelo vector $v_2 = \overline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

Logo, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Comentário: *Apesar do método de resolução envolver complexos, a resposta tinha que ser real, pois a matriz dada é real e a exponencial de uma matriz real é real.* ♢

(b) *Em termos de*

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} , \qquad y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

este problema de valor inicial escreve-se

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0 \ . \end{cases}$$

A solução é dada, por exemplo, pela fórmula de variação das constantes:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)\,ds \\ &= 0 + \int_0^t e^{-(t-s)} \begin{bmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(t-s) \\ -\sin(t-s) \end{bmatrix} ds \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \int_0^t \cos(t-s)\,ds \\ -\int_0^t \sin(t-s)\,ds \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Conclui-se que a solução é

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\sin t \\ e^{-t}(\cos t - 1) \end{bmatrix} .$$

□

(4) Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} & = & 2y_1 + 2y_2 + t \\ \\ \frac{dy_2}{dt} & = & 2y_1 + 2y_2 \ . \end{cases}$$

Resolução: *Este sistema fica mais simples se for traduzido nas incógnitas* $x_1 = y_1 - y_2$ *e* $x_2 = y_1 + y_2$. *Como*

$$\begin{cases} \dot{y_1} - \dot{y_2} & = & t \\ \dot{y_1} + \dot{y_2} & = & 4(y_1 + y_2) + t \ , \end{cases}$$

as novas funções satisfazem

$$\begin{cases} \dot{x_1} & = & t \\ \dot{x_2} & = & 4x_2 + t \ . \end{cases}$$

A solução geral da primeira equação é

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + c_1$$

onde c_1 *é uma constante real arbitrária. A segunda equação admite o factor de integração* e^{-4t} *e resolve-se como se segue:*

$$\begin{aligned} \dot{x_2} = 4x_2 + t \quad & \Longleftrightarrow \quad e^{-4t}\dot{x_2} - 4e^{-4t}x_2 = te^{-4t} \\ & \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{-4t}x_2\right) = te^{-4t} \\ & \Longleftrightarrow \quad e^{-4t}x_2 = \int te^{-4t}\,dt + c_2 \\ & \Longleftrightarrow \quad x_2(t) = e^{4t}\left(-\frac{t}{4}e^{-4t} - \frac{1}{16}e^{-4t} + c_2\right) \\ & \Longleftrightarrow \quad x_2(t) = -\frac{t}{4} - \frac{1}{16} + c_2e^{4t} \end{aligned}$$

onde c_2 *é uma constante real arbitrária. Como* $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ *e* $y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$, *conclui-se que a solução geral pedida é*

$$\begin{cases} y_1(t) & = & \frac{t^2}{4} + k_1 - \frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} \\ y_2(t) & = & -\frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} - \frac{t^2}{4} - k_1 \ . \end{cases}$$

onde $k_1 = \frac{c_1}{2}$ *e* $k_2 = \frac{c_2}{2}$ *são constantes reais arbitrárias.* □

Comentário: *Em alternativa, poder-se-ia ter aplicado a fórmula de variação das constantes ao sistema original.* ♢

(5) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais escalares:

(a) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 0$;

(b) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1$;

(c) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t}$;

(d) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1 + e^{-2t}$.

Resolução:

(a) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0$$

onde $D = \frac{d}{dt}$ *é o operador de derivação em ordem a* t. *Como* $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ *tem apenas a raiz* -2 *com multiplicidade 2, conclui-se que a solução geral é*

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

(b) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2 + 4D + 4)y = 1 \ . \qquad (\star)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Para encontrar uma solução particular, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de 1 é D. *A equação homogénea auxiliar* $D(D^2+4D+4)y = 0$ *tem solução geral* $a_1 + a_2 e^{-2t} + a_3 t e^{-2t}$. *Como a família* $a_2 e^{-2t} + a_3 t e^{-2t}$ *é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada a* $(\star)$, *estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de* $(\star)$. *Vai-se então determinar a constante* a_1, *substituindo-a na equação* $(\star)$ *e impondo que seja uma solução particular:*

$$(D^2 + 4D + 4)a_1 = 1 \iff 4a_1 = 1 \iff a_1 = \frac{1}{4} \ .$$

Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{4} \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

(c) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2 + 4D + 4)y = e^{-2t} \ . \qquad (\star\star)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Para encontrar uma solução particular, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de e^{-2t} *é* $D+2$. *A equação homogénea auxiliar* $(D+2)(D^2+4D+4)y = 0$, *que é equivalente a* $(D+2)^3 y = 0$, *tem solução geral* $a_1 e^{-2t} + a_2 t e^{-2t} + a_3 t^2 e^{-2t}$. *Como a família* $a_1 e^{-2t} + a_2 t e^{-2t}$ *é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada a* $(\star\star)$, *estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de* $(\star\star)$. *Vai-se então determinar a constante* a_3, *substituindo* $a_3 t^2 e^{-2t}$ *na equação* $(\star\star)$ *e impondo que seja uma solução particular:*

$$\begin{aligned}
& (D^2 + 4D + 4)(a_3 t^2 e^{-2t}) = e^{-2t} \\
\iff \quad & (4a_3 t^2 e^{-2t} - 8a_3 t e^{-2t} + 2a_3 e^{-2t}) + 4(-2a_3 t^2 e^{-2t} + 2a_3 t e^{-2t}) + 4a_3 t^2 e^{-2t} = e^{-2t} \\
\iff \quad & \begin{cases} 4a_3 - 8a_3 + 4a_3 = 0 \\ -8a_3 + 8a_3 = 0 \\ 2a_3 = 1 \end{cases} \iff \quad a_3 = \frac{1}{2} \ ,
\end{aligned}$$

onde o sistema de equações para a_3 *foi obtido igualando os coeficientes de* $t^2 e^{-2t}$, $t e^{-2t}$ *e* e^{-2t} *nos membros esquerdo e direito. Conclui-se que a solução geral é*

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-2t} \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

(d) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2 + 4D + 4)y = 1 + e^{-2t} \ .$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Encontra-se uma solução particular somando as soluções particulares determinadas nas alíneas (b) e (c), as quais correspondem a cada uma das parcelas do membro direito da equação. Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t^2 e^{-2t} \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \textit{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

□

Comentário: *Em alternativa, na alínea (d) poder-se-ia ter aplicado o método dos coeficientes indeterminados para calcular uma solução particular, notando que o aniquilador da soma $1 + e^{-2t}$ é a composição dos aniquiladores de 1 e de e^{-2t}, ou seja, é $D(D+2)$.* ♢

(6) Determine a solução que verifica as condições iniciais $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ e $y^{(2)}(0) = 1$ para as seguintes equações diferenciais escalares:

(a) $y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5\dot{y} = e^t + t$;

(b) $y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5\dot{y} = e^{2t} \cos t$.

Resolução:

(a) *A equação diferencial pode ser escrita*

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = e^t + t \ . \qquad (\star)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = 0 \ . \qquad (\star)_H$$

Como $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$ tem as raízes simples 0, $2+i$ e $2-i$, a solução geral complexa da equação homogénea associada $(\star)_H$ é

$$a_1 + a_2 e^{(2+i)t} + a_3 e^{(2-i)t} \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \textit{onde } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C} \ .$$

enquanto que a solução geral real de $(\star)_H$ é

$$y_H(t) = c_1 + c_2 e^{2t} \cos t + c_3 e^{2t} \sin t \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \textit{onde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ .$$

Para obter uma solução particular de $(\star)$, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de $e^t + t$ é $D^2(D-1)$, obtido compondo aniquiladores das parcelas t e e^t. A equação homogénea auxiliar $D^2(D-1)(D^3 - 4D^2 + 5D)y = 0$, que é equivalente a $D^3(D-1)(D-2-i)(D-2+i)y = 0$, tem solução geral real $b_1 + b_2 t + b_3 t^2 + b_4 e^t + b_5 e^{2t} \cos t + b_6 e^{2t} \sin t$. Como a família $b_1 + b_5 e^{2t} \cos t + b_6 e^{2t} \sin t$ é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada $(\star)_H$, estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de $(\star)$. Vai-se então determinar as constantes b_2, b_3 e b_4, substituindo $b_2 t + b_3 t^2 + b_4 e^t$ na equação $(\star)$ e impondo que seja uma solução particular:

$$\begin{aligned} & (D^3 - 4D^2 + 5D)(b_2 t + b_3 t^2 + b_4 e^t) = e^t + t \\ \iff \ & b_4 e^t - 4(2b_3 + b_4 e^t) + 5(b_2 + 2b_3 t + b_4 e^t) = e^t + t \\ \iff \ & \begin{cases} b_4 - 4b_4 + 5b_4 = 1 \\ 10b_3 = 1 \\ -8b_3 + 5b_2 = 0 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} b_4 = \frac{1}{2} \\ b_3 = \frac{1}{10} \\ b_2 = \frac{4}{25} \end{cases} \end{aligned}$$

onde o sistema de equações para b_2, b_3 e b_4 foi obtido igualando os coeficientes de e^t, t e 1 nos membros esquerdo e direito. Logo, uma solução particular de $(\star)$ é

$$y_P(t) = \frac{4}{25}t + \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}e^t\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

Conclui-se que a solução geral de $(\star)$ é

$$y(t) = \underbrace{c_1 + c_2e^{2t}\cos t + c_3e^{2t}\sin t}_{y_H(t)} + \underbrace{\frac{4}{25}t + \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}e^t}_{y_P(t)}\ , \ \forall t \in \mathbb{R} \ \text{ onde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\ .$$

Para achar a solução particular que satisfaz as condições iniciais dadas, calcula-se a primeira e a segunda derivadas da solução geral:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= c_2e^{2t}(2\cos t - \sin t) + c_3e^{2t}(2\sin t + \cos t) + \frac{4}{25} + \frac{1}{5}t + \frac{1}{2}e^t \\ y^{(2)}(t) &= c_2e^{2t}(3\cos t - 4\sin t) + c_3e^{2t}(3\sin t + 4\cos t) + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}e^t \end{aligned}$$

e impõe-se as condições:

$$\begin{cases} y(0) &= c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ \dot{y}(0) &= 2c_2 + c_3 + \frac{4}{25} + \frac{1}{2} = 0 \\ y^{(2)}(0) &= 3c_2 + 4c_3 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{22}{250} \\ c_2 = -\frac{147}{250} \\ c_3 = \frac{129}{250}\ . \end{cases}$$

Portanto a resposta é

$$y(t) = \frac{22}{250} - \frac{147}{250}e^{2t}\cos t + \frac{129}{250}e^{2t}\sin t + \frac{4}{25}t + \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}e^t\ , \ \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

(b) *A equação diferencial pode ser escrita*

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = e^{2t}\cos t\ . \qquad (\star\star)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = 0\ ,$$

cuja solução geral real foi obtida na alínea anterior:

$$y_H(t) = c_1 + c_2e^{2t}\cos t + c_3e^{2t}\sin t\ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{ onde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\ .$$

Para encontrar uma solução particular de $(\star\star)$, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de $e^{2t}\cos t$ é $(D-2)^2+1$. A equação homogénea auxiliar $[(D-2)^2+1](D^3-4D^2+5D)y = 0$, que é equivalente a $D(D-2-i)^2(D-2+i)^2y = 0$, tem solução geral real

$$b_1 + b_2e^{2t}\cos t + b_3e^{2t}\sin t + b_4te^{2t}\cos t + b_5te^{2t}\sin t\ .$$

Como a família $b_1 + b_2e^{2t}\cos t + b_3e^{2t}\sin t$ é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada, estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de $(\star\star)$. Vai-se então determinar as constantes b_4 e b_5, substituindo $b_4te^{2t}\cos t + b_5te^{2t}\sin t$ na equação $(\star\star)$ e impondo que seja uma solução particular:

$$\begin{aligned} & (D^3 - 4D^2 + 5D)(b_4te^{2t}\cos t + b_5te^{2t}\sin t) = e^{2t}\cos t \\ \iff\ & (-2b_4 + 4b_5)\cdot e^{2t}\cos t + (-4b_4 - 2b_5)\cdot e^{2t}\sin t + 0\cdot te^{2t}\cos t + 0\cdot te^{2t}\sin t = e^{2t}\cos t \\ \iff\ & \begin{cases} -2b_4 + 4b_5 = 1 \\ -4b_4 - 2b_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_4 = -\frac{1}{10} \\ b_5 = \frac{1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

onde o sistema de equações para b_4 e b_5 foi obtido igualando os coeficientes de $e^{2t}\cos t$ e $e^{2t}\sin t$ nos membros esquerdo e direito. Logo, uma solução particular de $(\star\star)$ é

$$y_P(t) = -\frac{1}{10}te^{2t}\cos t + \frac{1}{5}te^{2t}\sin t\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

Conclui-se que a solução geral de $(\star\star)$ é

$$y(t) = \underbrace{c_1 + c_2e^{2t}\cos t + c_3e^{2t}\sin t}_{y_H(t)}\underbrace{-\frac{1}{10}te^{2t}\cos t + \frac{1}{5}te^{2t}\sin t}_{y_P(t)}\ ,$$

para todo o t em $\mathbb{R}$ onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
Para achar a solução particular que satisfaz as condições iniciais dadas, calcula-se a primeira e a segunda derivadas da solução geral:

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) \quad &= \quad c_2e^{2t}(2\cos t - \sin t) + c_3e^{2t}(2\sin t + \cos t) \\
&\quad -\frac{1}{10}e^{2t}\cos t - \frac{1}{10}te^{2t}(2\cos t - \sin t) \\
&\quad +\frac{1}{5}e^{2t}\sin t + \frac{1}{5}te^{2t}(2\sin t + \cos t) \\[1em]
y^{(2)}(t) \quad &= \quad c_2e^{2t}(3\cos t - 4\sin t) + c_3e^{2t}(3\sin t + 4\cos t) \\
&\quad -\frac{1}{10}e^{2t}(4\cos t - 2\sin t) - \frac{1}{10}te^{2t}(3\cos t - 4\sin t) \\
&\quad +\frac{1}{5}e^{2t}(4\sin t + 2\cos t) + \frac{1}{5}te^{2t}(3\sin t + 4\cos t)
\end{aligned}$$

e impõe-se as condições:

$$\begin{cases} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ \dot{y}(0) &= 2c_2 + c_3 - \frac{1}{10} = 0 \\ y^{(2)}(0) &= 3c_2 + 4c_3 - \frac{4}{10} + \frac{2}{5} = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = & \frac{3}{25} \\ c_2 = & -\frac{3}{25} \\ c_3 = & \frac{17}{50} \end{cases}.$$

Portanto a resposta é

$$y(t) = \frac{3}{25} - \frac{3}{25}e^{2t}\cos t + \frac{17}{50}e^{2t}\sin t - \frac{1}{10}te^{2t}\cos t + \frac{1}{5}te^{2t}\sin t\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

□